**基础课04 基本不等式**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 基本不等式及其应用 | 掌握 | 2023年天津卷  2022年新高考Ⅱ卷 | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，基本不等式是高考的热点，一般以选择题或填空题的形式出现，试题中等难度.预计2025年高考的命题会与其他知识交汇 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、基本不等式：

1.基本不等式成立的条件：①,.

2.等号成立的条件：当且仅当②时等号成立.

3.其中③叫作正数,的算术平均数，④叫作正数,的几何平均数.

##### 二、几个重要不等式

1. ⑤.

2. ⑥2,同号.

3. ⑦.

4. ⑧.

以上不等式等号成立的条件均为.

##### 三、利用基本不等式求最值

已知，，

1.如果是定值，那么当且仅当时，有最小值，是⑨（简记为“积定和最小”）.

2.如果是定值，那么当且仅当时，有最大值，是⑩（简记为“和定积最大”）.

###### 知识 拓展

1.若,,则（基本不等式链），当且仅当时，等号成立.（详情见本基础课后深度学习——基本不等式链）

2.要尽量避免多次使用基本不等式求最值.若必须多次使用，则一定要保证它们等号成立的条件一致.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 不等式与成立的条件是相同的.( × )

（2） 函数的最小值是2.( × )

（3） 函数,的最小值是4.( × )

（4） “且”是“”的充要条件.( × )

2. （易错题）已知正数，满足，则当取最小值时，的值为.

【**易错点**】忽视等号成立的条件致误.

[解析]因为，为正数，且，所以，当且仅当，即，时，等号成立，所以当取最小值时，.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A必修①P49·T5改编）已知，则的最大值是.

[解析]因为，所以，且，所以，当且仅当，即时，等号成立,所以的最大值是.

4. （人教A必修①P58·T5改编）若，，且，则的最小值为9.

[解析]因为，，所以，即，解得或（舍去），当且仅当时，等号成立，所以，即的最小值为9.

##### 题组3 走向高考

5. [2021·全国乙卷]下列函数中最小值为4的是( C ).

A. B.

C. D.

[解析]对于，，当且仅当时，等号成立，所以其最小值为3，故错误； 对于，因为，，当且仅当时，等号成立，又，所以其最小值不为4，故错误； 对于，因为函数的定义域为，而，，当且仅当，即时，等号成立，所以其最小值为4，故正确； 对于，，函数的定义域为，而且，如当时，，故错误.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 利用基本不等式求最值［多维探究］

##### 配凑法角度1

典例1（1） [2024·辽阳模拟]（多选题）已知，则的值可以为( CD ).

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

[解析]因为，所以，所以，当且仅当，即时，等号成立，故.故选.

（2） 已知，则的最大值为.

[解析]因为，所以，当且仅当，即时，等号成立，所以的最大值为.



**配凑法求解最值应注意的问题**

1.配凑的技巧，以整式为基础，注意利用系数的变化以及等式中常数的调整，做到等价变形.

2.代数式的变形以拼凑出和或积的定值为目标.

3.拆项、添项应注意检验利用基本不等式的条件.

##### 常数代换法角度2

典例2 已知，，，则的最小值为4.

[解析]，，,

,当且仅当，即时，等号成立,故的最小值为4.

变式设问 若将本例中的条件“”改为“”，则的最小值为1.

[解析]，，， 等式两边同除以得，

，当且仅当，即时，等号成立，故的最小值为1.



1.通过常数代换法并利用基本不等式求解最值的基本步骤

（1）根据已知条件或其变形确定定值（常数）；

（2）把确定的定值（常数）变形为1；

（3）把“1”的表达式与所求最值的表达式相乘或相除，进而构造和或积为定值的形式；

（4）利用基本不等式求解最值.

2.用常数代换法求解最值应注意的问题

（1）条件的灵活变形，确定或分离出常数是基础；

（2）将已知等式化成“1”的表达式，是代数式等价变形的关键；

（3）利用基本不等式求最值时要注意基本不等式的前提条件.

##### 消元法角度3

典例3 [2024·新疆联考]设,，则的最小值为( A ).

A. B. C. D. 6

[解析]由题意得,，所以，所以，

当且仅当，即时，等号成立，所以的最小值为.故选.



利用消元法求最值，即根据条件建立两个量之间的函数关系，然后代入代数式转化为函数的最值求解.有时会出现多元的问题，解决方法是消元后利用基本不等式求解，但应注意各个元的范围.

##### 多维训练

1. （多选题）设正实数，满足，则下列说法正确的是( AB ).

A. 的最小值为2 B. 的最大值为1

C. 的最大值为4 D. 的最小值为

[解析],,，

，

当且仅当，即时，等号成立，故正确；

，，当且仅当时，等号成立，故正确；

，，当且仅当时，等号成立，的最大值为2，故错误；

，当且仅当时，等号成立，故错误.故选.

2. 已知,则的最小值为.

[解析],

当且仅当,即时,等号成立,所以的最小值为.

3. 设正实数,满足，则的最小值为2.

[解析]根据题意可得，因为，，所以，

所以，当且仅当，即时，等号成立，故的最小值为2.

#### 考点二 基本不等式的综合问题［师生共研］

典例4（1） [2024·河南模拟]在中，是边上的点，，在线段上（不含端点），且，则的最小值为( B ).

A. B. C. D. 8

[解析]因为是边上的点，，所以，所以，

因为在线段上（不含端点），所以存在实数，使得，

所以，

又因为，且，不共线，则所以.

因为，所以，，

所以，当且仅当即时，等号成立，

所以的最小值为.故选.

（2） 若正实数,满足，且不等式有解，则的取值范围是( B ).

A. B.

C. D.

[解析]因为，当且仅当，即,时,等号成立，

要使不等式有解，只需，

所以 .故选.



**基本不等式的综合问题的解题思路**

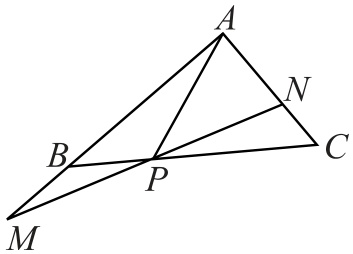
基本不等式的综合问题多与其他知识交汇，其核心思路是利用其他知识得到利用基本不等式求最值的条件，如两个数的和为定值、两个数的积为定值等，然后根据此定值求其他代数式的最值.

##### 针对训练

1. [2024·葫芦岛模拟]已知在中,点满足,过点的直线与,所在的直线分别交于点,,若,,则的最小值为( A ).

A. 3 B. C. 1 D.

[解析]如图,由题意可知,,



又,,

,又,,三点共线,

,,当且仅当,即时,等号成立，的最小值为3.故选.

2. [2024·黑龙江模拟]已知正数，满足，若恒成立，则实数的取值范围是.

[解析]已知正数,满足,

所以,所以，

则

，

当且仅当，即,时，等号成立，

要使恒成立,只需满足.故，即的取值范围是 .

#### 考点三 基本不等式的实际应用［师生共研］

典例5 [2024·安徽模拟]某企业计划2023年引进新型环保设备生产新能源汽车，通过市场分析，全年需投入固定成本1000万元，每生产（单位 ：百辆）汽车，需另投入成本万元，且若每辆新能源汽车的售价为8万元，并且全年内生产的汽车当年能全部销售完.

（1）求2023年的利润（单位：万元）关于年产量（单位：百辆）的函数关系式（其中利润销售额-成本）.

（2）当2023年新能源汽车的产量为多少百辆时，企业所获利润最大？并求最大利润.

[解析]（1）根据题意可知，

当时，，

当时，，

（2）当时，，

当时，取得最大值，最大值为1250；

当时，，

当且仅当，即时，等号成立.

综上，当时，取得最大值1250，

即当2023年新能源汽车的产量为1500辆时，企业所获利润最大，最大利润为1250万元.



1.利用其他知识点进行条件转化，表示出要求最值的式子，根据条件，利用基本不等式求最值.

2.利用基本不等式解决实际问题的步骤

（1）先理解题意,设变量.设变量时,一般把要求的最大值或最小值的变量定为函数.

（2）建立相应的函数关系式.把实际问题抽象为函数的最大值或最小值问题.

（3）在定义域内,求出函数的最大值或最小值.

（4）正确写出答案.

##### 针对训练

[2024·哈尔滨模拟]某农场发现有400平方米的农田遭遇洪涝，每平方米农田受灾造成直接损失400元，且渗水面积将以每天10平方米的速度扩散，相关部门立即组织人力进行抢修，每位抢修人员每天可抢修农田5平方米，劳务费为每人每天400元，还为每位抢修人员提供240元物资补贴.若安排位抢修人员参与抢修，则需要天完成抢修工作，渗水造成的总损失（总损失因渗水造成的直接损失各项支出费用）为元.

（1） 写出关于的函数解析式；

[解析]因为每位抢修人员每天可抢修农田5平方米，需要天完成抢修工作，

所以可得，即，显然，即，且，

因为总损失因渗水造成的直接损失各项支出费用，

所以，

将代入上式中，得.

（2） 应安排多少位抢修人员参与抢修，才能使总损失最小，并求出总损失.

[解析],

当且仅当，即时，等号成立，

所以应安排42位抢修人员参与抢修，才能使总损失最小，此时总损失为211680元.

### 拓展教材 深度学习

**基本不等式链**

若,，

则 ,当且仅当时，等号成立.

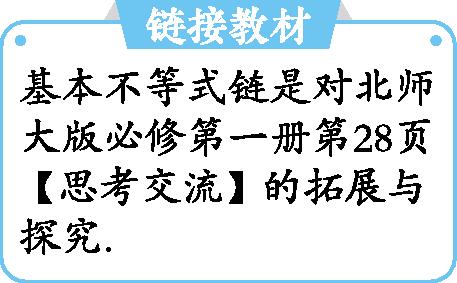
其中叫作,的调和平均数；

叫作,的几何平均数；

叫作,的算术平均数；

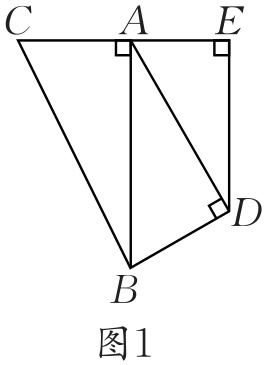
叫作,的平方平均数.

这一结论，称为基本不等式链.



典例 （一题多解）若,，求证：.

[解析]（法一：直角模型）分别以,为直角边作直角三角形，其中,，再分别以,为斜边和直角边作直角三角形，其中，再过点作的垂线交的延长线于点，如图1，



则根据勾股定理可得,，

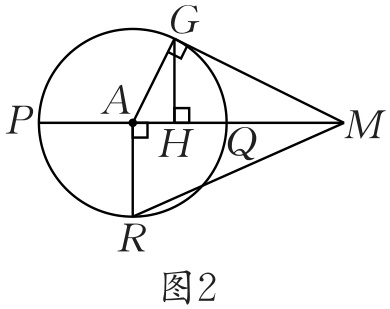
再利用，得到，

从而，即，

当时,.

综上，结论成立.

（法二：切割线模型）如图2，



设,,，则,，

由圆的切割线定理可得，

由射影定理，可得，

由勾股定理可得，

从而,即，

当时,.

综上，结论成立.

（法三：三角换元）设，令 , ,，

于是 ,, ，

因为，

所以，

即，当且仅当时，等号成立.

深度训练 （多选题）若正实数,满足，则( ACD ).

A. 有最大值，最大值为

B. 有最小值，最小值为3

C. 有最小值，最小值为

D. 有最大值，最大值为

[解析]对于，因为，当且仅当时，等号成立，所以正确；

对于，由可知，则由基本不等式，得，即，当且仅当，即时，等号成立，所以错误；

对于，因为，即，当且仅当时，等号成立，所以正确；

对于，因为，即，当且仅当时，等号成立，所以正确.

故选.